Домашна работа 3 по Алгебра 1. 2 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

03 Януари 2022

2 Въпрос В линейно пространство U над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа са дадени базиси

$$e = (e_1, e_2) \text{ и } e' = (e'_1, e'_2) \quad \text{с} \quad e'_1 = e_1 + 3e_2, \quad e'_2 = 2e_1 + 5e_2$$

а в линейното пространство V над $\mathbb{Q}$ са дадени базиси

$$f = (f_1, f_2, f_3) \text{ и } f' = (f'_1, f'_2, f'_3) \quad \text{с} \quad f_1 = f'_1 + 3f'_2 + 6f'_3, \quad f_2 = -f'_2 - 2f'_3, \quad f_3 = -f'_1 - 4f'_2 - 7f'_3$$

Да разгледаме линейно изображение $\varphi : U \to V$, зададено чрез

$$\varphi(x_1e'_1 + x_2e'_2) = (2x_1 + 4x_2)f'_1 + (6x_1 + 12x_2)f'_2 + (14x_1 + 27x_2)f'_3$$

за произволни $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$. Да се намери матрицата A на φ спрямо базиса $e = (e_1, e_2)$ на U и базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ на V.

Решение: Нека $e' = eT'$, $e = e'T$, $f = f'S$ и A' е матрицата на φ спрямо базиса e' и f'.

От условие, извеждаме че $T' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. $e = e'T = eT'T$ $E_2 = T'T$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Умножаваме първи ред по -3 и събираме с втори. Умножаваме втори по 2 и събираме с първи. Умножаваме втори по -1.

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$ Следователно $T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

От условие, извеждаме че $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}$. $SS^{-1} = E_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Умножаваме втори ред по -2 и събираме с трети. Умножаваме първи по -3 и събираме с втори.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Събираме трети ред с първи и втори. Умножаваме втори по -1.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Следователно $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

От условие, извеждаме че $A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$. По Теорема, $A = S^{-1}AT =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$